DEVOIR DE SYNTHESE N°3
4 ème Math 1+2 Durée : 4h

EXERCICE N°1

Soit un triangle rectangle isocèle tel que $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $O = A * B$.

On pose $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit à ABC et D le point diamétralement opposé à C sur $\mathscr{C}$.

Soit F un point variable de $\mathscr{C}$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FB}}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $F \neq C$.

La tangente à $\mathscr{C}$ en F coupe (AB) en K et rencontre les tangentes à $\mathscr{C}$ en C et D respectivement en H et H'.

1/ a) Déterminer la médiatrice de chacun des segments [FC] et [DF].
   b) Montrer que le triangle HOH' est rectangle en O , déduire que KH = KH' = KO .

2/ La bissectrice intérieure de [KO , KF] coupe (OF) en P et (CH) en T.
   a) Montrer que P est l'orthocentre de OKH. Déduire que (HP) // (OC).
   b) Montrer que P appartient à une parabole fixe $\mathcal{P}$ de foyer O . Préciser sa directrice.

3/ a) Quelle est la tangente à $\mathcal{P}$ en P.
   b) Déduire que le cercle de diamètre [PT] passe par O.

EXERCICE N°2

Une boite A contient quatre boules portant les nombres : -2 , -2 , 0 , 1 . Une deuxième boite B contient aussi quatre boules portant les nombres : -2 , 1 , 1 , 0 .
Toutes les boules des deux boites sont indiscernables au toucher.

1/ On tire de chaque boite une boule et on note X le produit des nombres marqués sur les deux boules obtenues.
   a) Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique ainsi que sa variance.
   b) Calculer la probabilité de l'événement S : « X est strictement positif ».

2/ n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète l'épreuve précédente n fois de suite en conservant pour chaque épreuve les mêmes conditions. On note Y l'aléa égale au nombre de fois où S est réalisé.
   a) Déterminer la loi de probabilité de Y.
   b) Calculer la probabilité de l'évènement A : « S est réaliser au moins une fois ».
   c) Déterminer n pour que la probabilité de l'événement A soit supérieur ou égale à 0,9.

3/ Soit à présent l'épreuve suivant : on choisit une boite au hasard (les choix étant équiprobables) et on tire une boule ; quelle est la probabilité qu'elle porte le nombre 1.

PROBLEME

A un entier naturel $n \geq 1$ on associe la fonction numérique f_n définie sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{(\mathrm{Log}\,x)^n}{x^2}$.

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
(choisir comme unités graphiques 1cm sur x'x et 10cm sur y'y).
La première partie propose l'étude de f_1. Dans les parties II et III on précise certains comportements des fonctions f_n et des primitives de ces fonctions.

I/

1/ Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$ .Etudier les variations de f_1.

2/ Tracer la demi tangente à C_1 au point d'abscisse 1 puis tracer la courbe C_1.

3/ A l'aide d'une intégration par parties calculer , pour x élément de I :

$$I_1(x) = \int_1^x f_1(t)\,dt$$

II/

1/ En remarquant que $\dfrac{(\operatorname{Log} x)^n}{x^2} = \left(\dfrac{\operatorname{Log} x}{x^{\frac{2}{n}}}\right)^n$ déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

2/ a) Calculer $f_n'(x)$ et vérifier que $f_n'(e^{\frac{n}{2}}) = 0$.

Donner le tableau de variation de f_n.

b) Vérifier que la valeur maximale de f_n sur I est : $y_n = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{2e}\right)^n$

3/ On se propose d'étudier la suite (y_n). Soit n un entier strictement positif.

a) Calculer , pour $x > 1$, $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$.

b) Montrer que $y_{n+1} = \dfrac{1}{2} f_n(e^{\frac{n+1}{2}})$ et que $y_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} y_n$.

c) En déduire que $y_n \leq \dfrac{1}{e}\dfrac{1}{2^n}$. Quelle est la limite de la suite (y_n) ?

III/

A tout entier $n \geq 1$ et à tout nombre réel x de I, on associe l'intégrale

$$I_n(x) = \int_1^x f_n(t)\,dt$$

1/ a) Soit $k \geq 1$ un entier. Grâce à une intégration par parties démontrer la relation :

$$I_{k+1}(x) = I_k(x) - \frac{1}{(k+1)!}\,\frac{(\operatorname{Log}x)^{k+1}}{x}$$

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$:

$$I_n(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\operatorname{Log}x}{x} - \frac{(\operatorname{Log}x)^2}{2!\,x} - \dots - \frac{(\operatorname{Log}x)^{n-1}}{(n-1)!\,x} - \frac{(\operatorname{Log}x)^n}{n!\,x}$$

2/ Soit $\alpha \geq 1$ un nombre réel fixé.

a) Montrer que $0 \leq I_n(\alpha) \leq (\alpha - 1)\,y_n$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(\alpha)$

3/ Pour $n \geq 1$ et $x \geq 1$ on pose : $W_n(x) = 1 + \dfrac{\operatorname{Log}x}{1!} + \dfrac{(\operatorname{Log}x)^2}{2!} + \dots + \dfrac{(\operatorname{Log}x)^n}{n!}$

a) Exprimer $W_n(x)$ en fonction de $I_n(x)$.

b) $\alpha \geq 1$ étant un nombre réel fixé , déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n(\alpha)$.

c) En déduire la limite de la suite (U_n) de terme général :

$$U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$